GOBIERNO DE ESPAÑA MINISTERIO DE EDUCACIÓN

DCT2009-00040-P

RESUMEN DE LA ACTIVIDAD DOCENTE A REALIZAR DURANTE LA ESTANCIA

Profesora: Lia Vas.

Nombre del curso: “ Anillos y módulos de cocientes. Anillos de operadores”.

Esquema y contenido del curso

El curso que se propone versa sobre anillos y módulos de cocientes y anillos de operadores. Se impartirá en lengua inglesa (el curso pretende integrarse en un programa de doctorado bilingüe en el que los alumnos pueden cursar al menos el 50% de los créditos en inglés). El curso tendrá una duración de dos semanas con 2 horas lectivas más 2 horas de atención al alumnado por cada día lectivo de la semana, diviéndose el curso en tres temas:

Tema 1: Anillos totales de cocientes. (8 horas lectivas + 8 horas de tutorías).

Tema 2: Anillos tipo von Neumann y la conjetura de Berberian. (6 horas lectivas + 6 horas de tutorías).

Tema 3: Anillos tipo von Neumann limpios. (6 horas lectivas + 6 horas de tutorías).

Los contenidos concretos de cada tema se exponen a continuación:

Tema 1: Anillos totales de cocientes

El anillo total de cocientes $Q^r_{tot}(R)$ (a veces también llamado el anillo de cocientes por la derecha maximal plano epimórfico de la envolvente epimórfica por la derecha plana) se obtiene normalmente como una unión directa de una cierta familia de extensiones del anillo base R. Morita construyó $Q^r_{tot}(R)$ de una forma diferente, empezando con el anillo maximal de cocientes por la derecha $Q^r_{max}(R)$ y empequeñeciéndolo usando inducción transfinita de ordinales. Consideraremos algunas clases de anillos para las cuales la construcción de Morita puede ser simplificada. Usando esta simplificación, probamos que la construcción de Morita de $Q^r_{tot}(R)$ acaba en tan sólo un paso si R es un anillo semihereditario por la derecha, produciendo una descripción palpable de $Q^r_{tot}(R)$ en este caso. También se tratarán algunas clases de anillos para las cuales la construcción de Morita acaba en una cantidad numerable de pasos.

Tema 2: Anillos tipo von Neumann y la conjetura de Berberian.

Cuando las álgebras de von Neumann aparecieron en teoría de operadores y empezaron a atraer la atención de un público matemático más amplio, la necesidad de axiomatizar al menos en parte la teoría de álgebras de von Neumann se hizo rápidamente necesaria. Esto resultó en un interés creciente por las clases de anillos y álgebras como los *-anillos Baer, las C*-álgebras de Rickart y varios otros. Como resultado, los “anillos de operadores” pueden ser estudiados sin involucrar los a veces complejos métodos de la teoría clásica de operadores. Así pues, nos concentraremos en este capítulo en una clase de *-anillos Baer tipo álgebras de von Neumman que están definidos por nueve axiomas. Los dos últimos de estos nueve son particularmente fuertes. En concreto probaremos que el noveno axioma es consecuencia de los siete primeros y veremos que esto da una respuesta afirmativa a la pregunta planteada por S. K. Berberian sobre si para un *-anillo Baer R satisfaciendo los siete primeros axiomas, se tiene necesariamente que el anillo de matrices $M_n(R)$ es también un *-anillo Baer.

Tema 3: Anillos tipo von Neumann limpios.

En este capítulo nos centramos en la pregunta sobre si los anillos tipo álgebras de von Neumann anteriores son o no limpios. Recordemos que un anillo se dice limpio si todo elemento es suma de un elemento inversible y otro idempotente. Probaremos que cualquier *-anillo Baer que sea además un álgebra de von Neumann de tipo I es limpio. En particular, obtendremos que todas las AW*-álgebras fintas de tipo *I* (y por tanto todas las álgebras de von Neumann de tipo *I* finitas también) son limpias. Finalmente, mostraremos a los estudiantes algunos ejemplos relacionados con las álgebras de von Neumann de grupo y enumeraremos algunos problemas abiertos.

TRADUCCIÓN AL INGLÉS:

Chapter 1: Total Right Rings of Quotients

The total right ring of quotients $Q^r_{tot}(R)$ (sometimes also called the maximal flat epimorphic right ring of quotients or right flat epimorphic hull) is usually obtained as a directed union of a certain family of extensions of the base ring *R*. Morita constructs $Q^r_{tot}(R)$ in a different way, starting from the maximal right ring of quotients $Q^r_{max}(R)$ and shrinking it using the transfinite induction on ordinals. We consider some classes of rings for which Morita's construction can be simplified. Using this simplification, we prove that Morita's construction of $Q^r_{tot}(R)$ ends after just one step if *R* is a right semihereditary ring, producing a hands-on description of $Q^r_{tot}(R)$ in this case. We also discuss some classes of rings for which Morita's construction ends in countably many steps.

Chapter 2: Von-Neumann-algebra-like rings and the answer to a S. K. Berberian's question

When von Neumann algebras emerged from operator theory and started attracting the attention of a wider mathematical public, the need to axiomatize at least a part of theory of von Neumann algebras became readily apparent. This resulted in increased interest in the classes of rings and algebras such as Baer *-rings, Rickart *C**-algebras, and others. As a result, “rings of operators" can be studied without involving sometimes rather complex methods of operator theory. We shall concentrate on a class of Von-Neumann-algebra-like Baer *-rings defined by nine axioms. The last two of these nine axioms are particularly strong. We prove that the ninth axiom follows from the first seven and demonstrate that this gives an affirmative answer to the question of S. K. Berberian if a Baer *-ring *R* satisfies the first seven axioms, is the matrix ring $M_n(R)$ a Baer *-ring.

Chapter 3: Cleanness of Von-Neumann-algebra-like rings

In this chapter we turn our attention to the question of cleanness of von-Neumann-algebra-like rings. A ring is clean if its every element is the sum of a unit and an idempotent. We prove that type *I* von-Neumann-algebra-like Baer *-rings are clean. In particular, we obtain that all finite type *I* AW*-algebras (thus all finite type *I* von Neumann algebras as well) are clean. Finally, we shall present some examples related to group von Neumann algebras and list some open problems.